**Exercice 1 (7 points)**

Le problème d'affectation de fréquences dans les réseaux radio-mobiles est un problème connu en recherche opérationnelle. L'affectation de fréquences peut être modélisée comme un problème de coloration de graphe. L'objectif de base consiste à affecter des valeurs de fréquences aux stations d'un réseau radio-mobile, tout en respectant un ensemble de contraintes pour minimiser les interférences ou bien le nombre de fréquences utilisées. Le problème exige que les fréquences affectées à deux stations voisines (éloignées d'une distance prédéterminée) doivent être différentes.

Soit l’exemple d’un réseau mobile de six stations numérotées de S1 à S6 respectivement. La distance en km entre les stations est donnée par le tableau ci-dessous. Deux stations sont considérées voisines si la distance entre elles est inférieure ou égale à 15 km. On suppose que le nombre de fréquences allouées initialement est 2.

**Questions :**

1. Modéliser ce problème sous forme d’un graphe, donner l’interprétation des nœuds et des arrêtes.
2. Le nombre de fréquences initialement allouées est-il suffisant ? Justifier votre réponse.
3. On définit deux variables de décision Xik et wk. La variable Xik prend la valeur 1 si la station *i* utilise la fréquence *k*, sinon 0. La variable wk prend la valeur 1 si la fréquence k est utilisée, sinon 0. Si la fonction objectif est : , donner la modélisation mathématique complète du problème.
4. Donner un algorithme glouton (greedy algorithm) pour résoudre ce problème. Appliquer le sur l’exemple précédent et donner le nombre de fréquences trouvé.
5. On veut construire un algorithme de recherche locale pour résoudre ce problème avec 2 fréquences seulement. Vu que le nombre de fréquences est insuffisant, nous voulons minimiser le nombre d’interférences dans le réseau. Pour cela, il existe 3 représentations possibles d’une solution : vecteur de taille 6, matrice de dimension 6\*2, et un tableau d’ensembles de taille 2.
   * Présenter les 3 représentations de la solution, et les appliquer sur un exemple quelconque.
   * Pour la première représentation (vectorielle), écrire une fonction pour évaluer une solution S.

**Tableau de distances entre les stations**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **S1** | **S2** | **S3** | **S4** | **S5** | **S6** |
| **S1** | 0 | 12 | 30 | 45 | 15 | 30 |
| **S2** | 12 | 0 | 15 | 10 | 55 | 24 |
| **S3** | 30 | 15 | 0 | 10 | 15 | 10 |
| **S4** | 45 | 10 | 10 | 0 | 15 | 12 |
| **S5** | 15 | 55 | 15 | 15 | 0 | 50 |
| **S6** | 30 | 24 | 10 | 12 | 50 | 0 |